數學傳播　49卷2期, pp. 136-140

再探一道壓軸題及其尺規作法

張小川・邢春林

在解題教學中, 有部分教師只是教給學生問題的解法, 而對爲什麼這樣解及解法的數學本質揭示得不夠。在中考復習時遇到一道往年的壓軸題, 命題組給出的參考答案也是只說了具體的做法, 本文詳細說明爲什麼這樣做, 並給出尺規作法及結論的應用, 供參考。

一、探究原題

(2014年淄博中考數學壓軸題) 如圖 1, 點 A 與點 B 的座標分別是 (1,0)、(5,0), 點 P 是該直角坐標系內的一個動點。

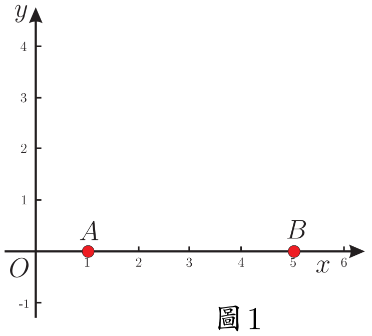

圖 1

(1) 使 $\angle APB=30^\circ$ 的點 P有 __________ 個;

(2) 若點 P 在 y 軸上, 且 $\angle APB=30^\circ$,
求滿足條件的點 P 的座標;

(3) 當點 P 在 y 軸上移動時, $\angle APB$ 是否有最大值? 若有, 求點 P 的座標, 並說明此時 $\angle APB$ 最大的理由; 若沒有, 也請說明理由。

說明 (1) (2) 略。(3) 原題給出的參考答案是「當過點 A、B 的 $\odot E$ 與 y 軸相切於點 P 時, $\angle APB$ 最大 $\cdots\cdots$」。

爲什麼過點 A、B 的 $\odot E$ 與 y 軸相切於點 P 時, $\angle APB$ 最大? 尺規作圖如何作出這個圓? 我們不妨探究一番。

探究1: $\angle APB$ 最大時 $\odot E$ 與 y 軸相切

如圖 2, 點 P 在 y 軸上移動時, 有一個時刻 $\angle APB$ 最大 (只考慮 y 軸正半軸的情況, y 軸負半軸上的情況類似), 只要能求出 $\angle APB$ 最大時線段 OP 的長度就可以了。爲方便接下來的計算, 不妨設 $OP=x$, $\angle APB=\theta$, $\angle OPA=\beta$, $\angle OPB=\alpha$。

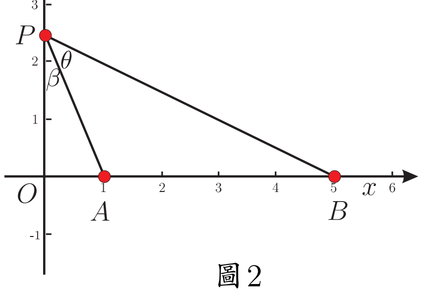

圖 2

當 $\angle APB$ 最大時, $\tan\angle APB$ 也最大, 也就是 $\tan\theta$ 最大。

$$\tan\angle\beta=\frac{OA}{OP}=\frac{1}{x};\qquad \tan\angle\alpha=\frac{OB}{OP}=\frac{5}{x}.$$

而 $\tan\theta=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$, 將 $\dfrac{1}{x}$、$\dfrac{5}{x}$ 代入上式得 $\tan\theta=\dfrac{4}{x+\dfrac{5}{x}}$, 當分母 $x+\dfrac{5}{x}$ 最小時 $\tan\theta$ 最大。$x+\dfrac{5}{x}\geq 2\sqrt{5}$, 當且僅當 $x=\dfrac{5}{x}$ 時等號成立, 所以當 $x=\sqrt{5}$ 時, $\tan\theta$ 最大。

下面說明當 $\angle APB$ 最大時, 過 A、B 的圓與 y 軸切於點 P。可以有以下兩種思路。

思路1: 根據圓的定義和切線的判定

如圖3。以 AB為弦的圓圓心在 AB 的中垂線上, 作線段 AB 的中垂線, 過點 $P(0,\sqrt{5})$ 作 y 軸的垂線與 AB 的中垂線相交於點 $E(3,\sqrt{5})$。

由畢氏定理可以計算出 $EA=3$。此時有 $EA=EB=EP=3$, 所以 A、B、P 在同一個圓上, 又 $EP\perp y$ 軸, 所以圓 E 和 y 軸相切於點 P。

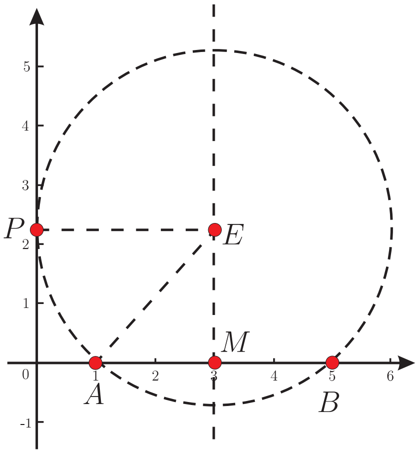

圖3

思路2: 根據切割線定理的逆定理

如圖 3。由 $OP=\sqrt{5}$, $OA=1$, $OB=5$, 可以想到 $OP^2=OA\cdot OB$。

根據切割線定理的逆定理知道 [1], 以 AB 爲弦的圓與 OP 相切於點 P。綜上所述, 當 $\angle APB$ 最大時, 以 AB 爲弦的圓 E 與 y 軸相切。

當 A、B 橫坐標變爲任意數值 m、n $(m,n>0)$ 時仍有類似的結論, 不再贅述。

探究2: 圓 E 與 y 軸相切時 $\angle APB$ 最大

如圖 4。以 AB 爲弦的圓 E 與 y 軸相切於點 P。在 y 軸上任找一點 Q (不與 P 重合), 連接 AQ 和 BQ, BQ 與圓交於點 T, 證明 $\angle APB>\angle AQB$ 即可。

不容易直接比較 $\angle APB$ 與 $\angle AQB$ 的大小。觀察圖 4, $\angle APB$ 是圓周角, 連接 AT 就有 $\angle ATB=\angle APB=\theta$, 而 $\angle ATB>\angle AQB$, 所以 $\angle APB>\angle AQB$。

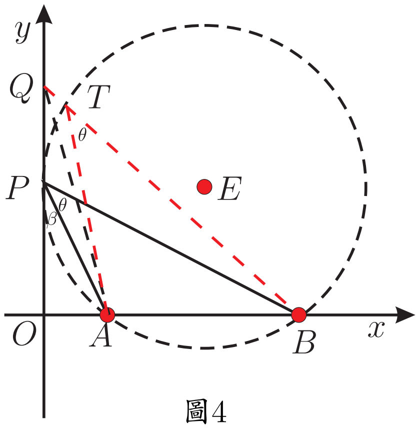

圖4

所以, 以 AB 爲弦的圓與 y 軸相切於點 P 時, $\angle APB$ 最大。

並且, 此時根據切割線定理有 $OP^2 = OA\cdot OB$。

二、尺規作法

尺規作出圓 E 的方法有多種, 限於篇幅, 在此只給出兩種容易想到的方法, 其餘的尺規作法讀者可以自行補充。

方法1: 根據切線的定義

如圖 5, 過 A、B 兩個點的圓, 其圓心 E 線上段 AB 的中垂線 MN 上, 要實現圓 E 與 y 軸相切, 則點 E 到 y 軸的距離就是 OF 的長, 再實現 E 到點 A、B 的距離是 OF 就可以了。

以 A 爲圓心, OF 的長爲半徑作圓, 與 AB 的垂直平分線 MN 相交於點 E_1 和 E_2, 再以 E_1 爲圓心 E_1A 爲半徑作圓 E_1, 圓 E_1 就是求作的圓 (圓 E_2 的作法類似, 略)。作法: 略。

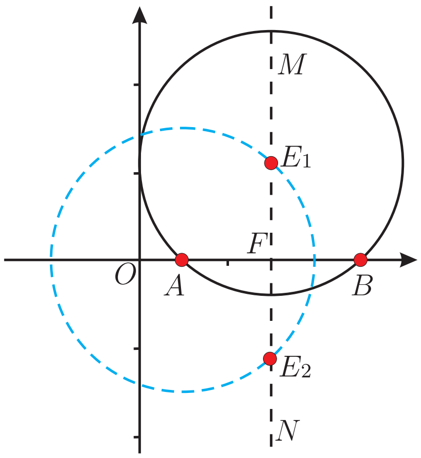

圖 5

方法2: 根據射影定理

在 x 軸上有 A、B 兩點, 過 A、B 兩點作一個圓使其與 y 軸相切。

根據切割線定理的逆定理 [1], 假如 P 爲求作圓的切點, 則有 $OP^2 = OA\cdot OB$, 過 A、B、P 三個點的圓就是求作的圓。

如何在 y 軸上找出點 P?

思路1

如圖6。由 $OP^2 = OA\cdot OB$, 可以想到射影定理, 作點 A 關於 y 軸的對稱點 C, 有 $OA = OC$, 只需在 y 軸上找一個點 P, 使得 $OP^2 = OC\cdot OB$ 即可。

以 BC 爲直徑作圓 F, 交 y 軸於點 P (只考慮正半軸的情況, 負半軸的情況讀者可自行補充)。根據射影定理, 此時就有 $OP^2 = OC\cdot OB$, 也就是 $OP^2 = OA\cdot OB$。

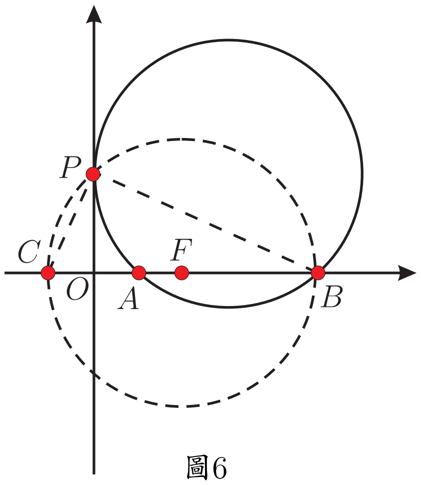

圖6

過 A、B、P 三個點的圓就是求作的圓。

思路2

如圖 7, 根據思路 1 中的想法, 以 OB 為直徑作圓 F, 過點 A 作 x 軸的垂線, 交圓 F 與點 C, 根據射影定理, $OP^2 = OA \cdot OB$, 再以 O 為圓心, OC 的長為半徑作弧, 交 y 軸於點 P (只作出 y 軸正半軸的情況), 此時 $OP^2 = OA \cdot OB$。

過 A、B、P 三個點的圓就是求作的圓。

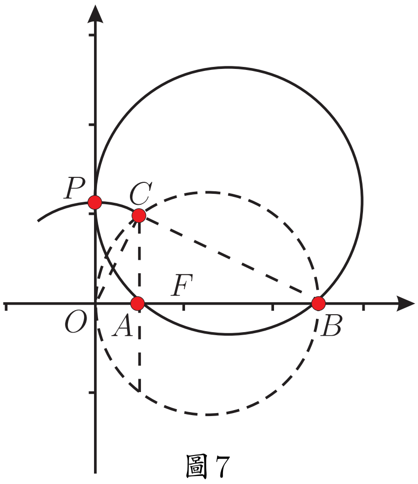

圖 7

三、結論應用

1.(2004年全國高中數學聯賽)

如圖 8, 在平面直角坐標系中, 給定兩點 $A(-1, 2)$、$B(1, 4)$, 點 P 在 x 軸上移動, 當 $\angle APB$ 取最大值時, 點 P 的橫坐標是多少?

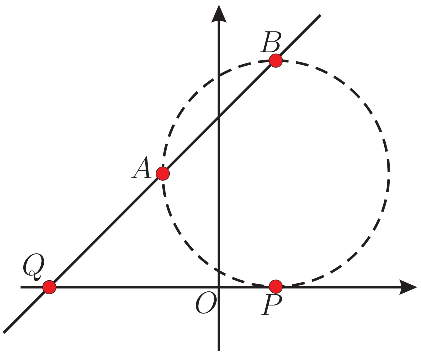

圖 8

思路分析

由上文分析可以知道, 當以 AB 為弦的圓與 x 軸相切的時候, $\angle APB$ 最大, 如何作出與 x 軸相切的圓可參考上文「尺規作法」。

由切割線定理知道, $QP^2 = QA \cdot QB$, 所以 $PQ = 4$, 所以點 P 的橫坐標為 1 或 -7。分別畫出圖形可以知道當點 P 的橫坐標為 1 時, $\angle APB$ 取最大值。

2.(2015陝西中考數學壓軸題)

如圖 9, 在四邊形 $ABCD$ 中, 有 $AD//BC$, $CD \perp BC$, $\angle ABC = 60°$, $AD = 8$, $BC = 12$.

(1) 略; (2) 略;

(3) 如圖 9, 在四邊形 $ABCD$ 的邊 AD上, 是否存在一點 P, 使得 $\cos\angle BPC$ 的值最小? 若存在, 求出此時 $\cos\angle BPC$的值; 若不存在, 請說明理由。

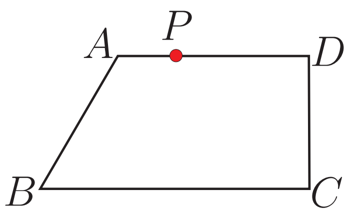

圖 9

思路分析

(1) (2) 略. (3) 要使得 $\cos\angle BPC$ 最小, 只需要 $\angle BPC$ 最大就可以。何時 $\angle BPC$ 最大? 以 BC 為弦的圓與 AD 相切於點 P 時, $\angle BPC$ 最大。具體解法, 略。

四、思考

通過上文的探究和分析可以看出, 一道往年的壓軸題, 如果直接按照參考答案給出的思路進行教學, 學生只能知道相切時角最大, 不知道爲什麼相切時圓最大, 也不會知道如何尺規作出這個圓, 因此在平時的課堂教學中, 可以重視對典型問題的深度探究, 在引導學生學好基礎知識、掌握基本技能和方法的基礎上, 對典型問題進行深度探究, 揭示數學本質, 讓學生在探索中學會發現問題, 進而分析問題、解決問題, 從而有效提升學生的數學素養。

參考文獻

1. 趙華文, 切割線定理的逆定理的證明及其應用[J]。赤峰教育學院學報, 2001(6):138-138。

—本文作者張小川任教中國山東淄博高青實驗中學, 邢春林任職中國山東省高青縣教研室—